

Procesos Estocásticos I

Tarea 1

Semestre 2026-2

Problema 1. *Definición y propiedades de cadenas de Markov.*

Considere una cadena de Markov homogénea $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ con espacio de estados $S = \{1, 2, 3\}$ y matriz de transición:

$$P = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

- (a) Verifique que P es una matriz estocástica. ¿Cuáles son las condiciones que debe satisfacer?
- (b) Si la distribución inicial es $\pi = (0.3, 0.4, 0.3)$, calcule la distribución de probabilidades en los tiempos $n = 1$ y $n = 2$. Ayúdese graficando las trayectorias posibles.

Problema 2. *Factorización de probabilidades conjuntas en cadenas de Markov.*

Sea $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ una cadena de Markov homogénea con espacio de estados S , distribución inicial $\pi = (\pi_i)_{i \in S}$ y matriz de transición $P = (p_{ij})$.

Considere una secuencia de estados $i_0, i_1, i_2, \dots, i_n \in S$.

- (a) Demuestre que la probabilidad conjunta de observar la secuencia de estados se puede factorizar como:

$$\mathbb{P}(X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1, X_0 = i_0) = \pi_{i_0} \cdot p_{i_0, i_1} \cdot p_{i_1, i_2} \cdot \dots \cdot p_{i_{n-1}, i_n}.$$

O de forma compacta:

$$\mathbb{P}(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n) = \pi_{i_0} \prod_{j=0}^{n-1} p_{i_j, i_{j+1}}.$$

Proporcione dos demostraciones: una usando la definición de probabilidad condicional, y otra usando inducción matemática.

- (b) Interprete esta factorización: ¿qué significa en términos de cómo se genera una trayectoria de la cadena?

- (c) Considere una cadena de Markov con matriz de transición $P = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 \end{pmatrix}$ y distribución inicial $\pi = (0.3, 0.4, 0.3)$. Calcule la probabilidad de la secuencia específica de estados: $X_0 = 1, X_1 = 2, X_2 = 3$ utilizando la factorización anterior.

Problema 3. Cálculo de probabilidades en una cadena de dos estados.

Considere una cadena de Markov de dos estados 0 y 1, con distribución inicial $\pi = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ y matriz de probabilidades de transición:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Encuentre:

- (a) La distribución de X_1 (la distribución después de 1 paso).
- (b) $\mathbb{P}(X_5 = 1 \mid X_4 = 0)$.
- (c) $\mathbb{P}(X_3 = 0 \mid X_1 = 0)$ (probabilidad de que en el paso 3 la cadena esté en estado 0, dado que en el paso 1 estaba en estado 0).
- (d) $\mathbb{P}(X_{100} = 0 \mid X_{98} = 0)$. Compare con el inciso anterior.
- (e) $\mathbb{P}(X_1 = 0 \mid X_2 = 0)$.
- (f) $\mathbb{P}(X_1 = 1 \mid X_2 = 1, X_3 = 1)$.
- (g) $\mathbb{P}(X_3 = 0, X_2 = 0 \mid X_1 = 0)$.

Problema 4. Distribución de probabilidades de una caminata aleatoria.

Sea $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ una caminata aleatoria como se define en los apuntes, es decir:

$$X_n = \sum_{i=1}^n Y_i, \quad X_0 = 0,$$

donde $\mathbb{P}(Y_i = 1) = p$ y $\mathbb{P}(Y_i = -1) = 1 - p$ con $0 < p < 1$.

- (a) Sea $n \in \mathbb{N}$ un entero positivo y consideremos el número de pasos hacia arriba (incrementos de +1) como u y el número de pasos hacia abajo (decrementos de -1) como d . Establezca las condiciones sobre u y d en términos de n y X_n .
- (b) Demuestre que para $X_n = x$ con $|x| \leq n$ y n, x de la misma paridad (ambos pares o ambos impares), se tiene:

$$\mathbb{P}(X_n = x \mid X_0 = 0) = \binom{n}{\frac{n+x}{2}} p^{\frac{n+x}{2}} (1-p)^{\frac{n-x}{2}}.$$

¿Qué sucede cuando n y x tienen paridades diferentes?

- (c) Considere el caso simétrico $p = \frac{1}{2}$. Calcule las probabilidades $\mathbb{P}(X_4 = 0)$, $\mathbb{P}(X_4 = 2)$, $\mathbb{P}(X_4 = 4)$ y $\mathbb{P}(X_4 = -2)$ partiendo de $X_0 = 0$. Verifique que estas probabilidades sumen 1.
- (d) Interprete la fórmula probabilística como un producto de dos factores: uno binomial (que cuenta las trayectorias) y otro exponencial (que pondera cada trayectoria). ¿Cómo se relaciona esta factorización con la estructura de la caminata aleatoria como una cadena de Markov homogénea?

Problema 5. Ecuación de Chapman-Kolmogorov y probabilidades en n pasos.

Considere la cadena de Markov del Problema 3 con matriz de transición:

$$P = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

- (a) Calcule $P^2 = P \times P$ y encuentre el elemento $(P^2)_{2,1}$. ¿Qué representa este valor?
- (b) Utilice la ecuación de Chapman-Kolmogorov para calcular $p_{1,3}^{(2)}$ (la probabilidad de ir del estado 1 al estado 3 en exactamente 2 pasos). Verifique su resultado con el elemento $(P^2)_{1,3}$.
- (c) Enuncie formalmente la ecuación de Chapman-Kolmogorov y explique su interpretación intuitiva.

Problema 6. Propiedades algebraicas de matrices estocásticas.

Una matriz P de tamaño $m \times m$ es **estocástica** si sus entradas son no negativas y cada fila suma 1. Una matriz P es **simétrica** si $P = P^T$, es decir, $p_{ij} = p_{ji}$ para todos i, j .

- (a) Demuestre que si P y Q son matrices estocásticas de tamaño $m \times m$, entonces el producto PQ también es una matriz estocástica. Luego demuestre que si P es una matriz estocástica, entonces P^n es estocástica para todo entero $n \geq 1$.
- (b) Demuestre que si P es una matriz estocástica **simétrica**, entonces P^n también es simétrica para todo entero $n \geq 1$.

Problema 7. Proceso de rachas.

Sea $\xi_1, \xi_2, \dots$ una sucesión de ensayos independientes de Bernoulli con probabilidad de éxito p y probabilidad de fracaso $q = 1 - p$. Sea X_n el número de éxitos consecutivos previos al tiempo n , incluyendo el tiempo n . Se dice que una racha de éxitos de longitud r ocurre al tiempo n si en el ensayo $n - r$ se obtiene un fracaso y los resultados de los ensayos $n - r + 1$ al n son todos éxitos.

Formalmente, el espacio de estados es $S = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, donde el estado k representa que hay exactamente k éxitos consecutivos hasta el tiempo presente.

- (a) Escriba la matriz de transición P de esta cadena. ¿Desde qué estado se puede transicionar al estado k para $k \geq 1$? ¿Cuál es la probabilidad de transición?

- (b) ¿El espacio de estados es finito o infinito? ¿Existe una distribución estacionaria? Justifique.
- (c) Calcule la probabilidad $p_{0,0}^{(n)}$ de estar en el estado 0 (acabo de fracasar) al tiempo n , partiendo de $X_0 = 0$. Interprete el significado de la cadena en términos de la ocurrencia de rachas de éxitos en la sucesión de ensayos de Bernoulli.

Problema 8. Diagonalización de matriz de transición 3×3 .

Considere una cadena de Markov con espacio de estados $S = \{1, 2, 3\}$ y matriz de transición:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Verifique que P es una matriz de permutación cíclica. ¿Cuál es el período de esta cadena?
- (b) Calcule los valores propios de P (Sugerencia: son las raíces cúbicas de la unidad: $1, \omega, \omega^2$ donde $\omega = e^{2\pi i/3}$).
- (c) Encuentre un vector propio asociado a $\lambda_1 = 1$.
- (d) Calcule P^3 e interprete.

Problema 9. Propiedad de Markov: independencia del futuro del pasado.

Sea $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ una cadena de Markov homogénea con espacio de estados S . Sea $i, j, k \in S$ estados arbitrarios y sean $m, n \in \mathbb{N}$ con $m < n$.

- (a) Demuestre que:

$$\mathbb{P}(X_n = j \mid X_{n-1} = i, X_m = k) = \mathbb{P}(X_n = j \mid X_{n-1} = i).$$

Interprete este resultado: ¿qué significa que el lado izquierdo sea igual al lado derecho?

- (b) Explique cómo este resultado refleja la “propiedad de falta de memoria”.
- (c) ¿Por qué esta propiedad es fundamental para el análisis de cadenas de Markov? Dé un ejemplo de un proceso estocástico que NO satisfaga esta propiedad.

Problema 10. Clases de comunicación y estructura de una cadena.

Considere una cadena de Markov con espacio de estados $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y matriz de transición:

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Identifique todas las clases de comunicación de esta cadena. ¿Cuántas hay?

- (b) Determine cuáles estados son accesibles desde el estado 1 y cuáles desde el estado 3.
- (c) ¿Es esta cadena irreducible? Justifique.
- (d) ¿Cuáles estados pueden alcanzar al estado 5? ¿El estado 5 es absorbente?
- (e) Si la cadena comienza en el estado 1, ¿cuál es la probabilidad de que alguna vez alcance el estado 5?

Problema 11. Irreducibilidad, aperiodicidad y períodos.

Considere una cadena de Markov con espacio de estados $S = \{1, 2, 3, 4\}$ y matriz de transición:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Identifique las clases de comunicación y determine si la cadena es irreducible.
- (b) Calcule el período de cada estado en la cadena. (Sugerencia: analice los ciclos en el grafo de transiciones.)
- (c) ¿Cuál es el período del estado 1? ¿Y del estado 4? ¿Tienen el mismo período?
- (d) Interprete el resultado: una cadena puede tener estados con diferentes períodos, ¿qué implica esto para la estructura de la cadena?

Problema 12. Probabilidad de primera visita: Proceso absorbente.

Considere una cadena de Markov con espacio de estados $S = \{1, 2, 3\}$ (donde 3 es absorbente) y matriz de transición:

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sea $f_{ij}^{(n)}$ la probabilidad de alcanzar el estado j desde i por primera vez en exactamente n pasos.

- (a) Calcule $f_{1,3}^{(1)}$, $f_{1,3}^{(2)}$ y $f_{1,3}^{(3)}$.
- (b) Esboce el cálculo de $f_{2,3}^{(2)}$: ¿cuáles son los caminos posibles que llegan a 3 por primera vez en 2 pasos partiendo de 2?
- (c) Calcule $f_{1,3} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{1,3}^{(n)}$, la probabilidad de que la cadena alguna vez alcance el estado 3 partiendo de 1. ¿Qué interpretación tiene este valor?
- (d) ¿Puede una cadena con un estado absorbente garantizar que todos los estados alcanzarán el estado absorbente con certeza? Justifique.

Problema 13. Probabilidad de primera visita: Caminata aleatoria sesgada.

Sea $\{X_n\}$ una caminata aleatoria en $\mathbb{Z}$ con $\mathbb{P}(Y_i = 1) = p = 0.6$ y $\mathbb{P}(Y_i = -1) = q = 0.4$.

Sea $f_{0,0}^{(n)}$ la probabilidad de que la cadena regrese al estado 0 por primera vez en exactamente n pasos, comenzando de $X_0 = 0$.

- (a) ¿En qué tiempos n es posible que $f_{0,0}^{(n)} > 0$? (Ayuda: considere la paridad.)
- (b) Calcule $f_{0,0}^{(2)}$: la probabilidad de retornar a 0 en exactamente 2 pasos.
- (c) Calcule $f_{0,0}^{(4)}$: la probabilidad de retornar a 0 en exactamente 4 pasos sin haber tocado 0 en los pasos 1 y 2. ¿Cuáles son los caminos que contribuyen?
- (d) Teniendo en cuenta que la caminata está sesgada hacia la derecha ($p > q$), haga una conjetura sobre si $f_{0,0} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{0,0}^{(2n)}$ es igual a 1 o menor que 1. (Justifique intuitivamente, aunque el cálculo exhaustivo es complejo.)

Problema 14. Proposiciones sobre probabilidades de transición y primeras visitas.

Sea $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ una cadena de Markov homogénea con espacio de estados S . Demuestre las siguientes proposiciones usando definiciones y propiedades de primeras visitas.

- (a) Para cualesquiera estados $i \in S$ y enteros $m, n \geq 1$, demuestre la siguiente desigualdad:

$$p_{ii}^{(n)} \cdot p_{ii}^{(m)} \leq p_{ii}^{(n+m)} \leq p_{ii}^{(n)} \cdot p_{ii}^{(m)} + \left(1 - p_{ii}^{(n)}\right).$$

Interprete estas cotas en términos de la probabilidad de regresar a un estado.

- (b) Para cualesquiera estados $i, j \in S$, demuestre que:

$$\sup_{n \geq 1} p_{ij}^{(n)} \leq f_{ij} \leq \sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)}.$$

- (c) Demuestre que $i \rightarrow j$ (es decir, j es accesible desde i) si y sólo si $f_{ij} > 0$.
- (d) Demuestre que $i \leftrightarrow j$ (es decir, i y j se comunican) si y sólo si $f_{ij} \cdot f_{ji} > 0$. (En otras palabras, ambas direcciones de accesibilidad deben cumplirse.)